雙週一題網路數學問題徵答
106 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 106.12.15 公佈，106.12.29 中午 12 點截止

設 A 和 B 是實數且 k 是一個正整數，當下式左邊有定義時，證明

$$\left|\frac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|\le k^2-1$$

解答： 設 $x=(A-B)/2$, $y=(A+B)/2$，利用積化和差和和差化積，可將表達式左邊的分子化簡爲

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\cos(kB+A)+\cos(kB-A)-\cos(kA+B)-\cos(kA-B)]\\ =&\frac{1}{2}[\cos(kB+A)-\cos(kA+B)]+\frac{1}{2}[\cos(kB-A)-\cos(kA-B)]\\ =&\ \sin(k-1)x\sin(k+1)y+\sin(k+1)x\sin(k-1)y\end{aligned}$$

分母可化簡爲 $2\sin x\sin y$，我們可以假設分母不是零。因此，我們有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|\le&\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k-1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(k+1)y}{\sin y}\right|\\ &+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(k-1)y}{\sin y}\right|\end{aligned}\qquad(1)$$

後面將證明除了 $\sin z=0$，對所有 $z\in\mathbb{R}$ 和所有正整數 n, $|\sin nz|\le n|\sin z|$。因此由 (1) 得到

$$\frac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\le k^2-1$$

現在證明對所有正整數 n, $|\sin nz|\le n|\sin z|$。當 $n=1$, $|\sin nz|=n|\sin z|$，不等式成立。

接下來利用歸納法證明 $|\sin nz|<n|\sin z|$, $n\ge 2$。對於 $n=2$，我們有 $|\sin 2z|=2|\cos z|\cdot|\sin z|<2|\sin z|$，不等式成立。

設 $n=k$ 時，$|\sin kz|<k|\sin z|$, $k\ge 2$。

當 $n = k+1$ 時，

$$\begin{aligned}|\sin(k+1)z| &= |\sin kz \cos z + \cos kz \sin z| \\ &\leq |\sin kz| + |\sin z| \\ &< k|\sin z| + |\sin z| \\ &= (k+1)|\sin z|\end{aligned}$$

得證。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「106 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。