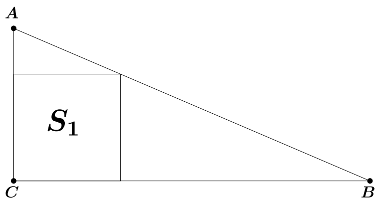
# 雙週一題網路數學問題徵答
# 106 年度第 1 學期

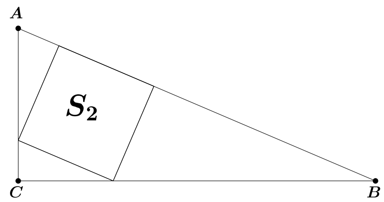
主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

**第六題：** 106.12.01 公佈，106.12.15 中午 12 點截止

如下圖，正方形 $S_1$ 與 $S_2$ 內接於直角三角形 $ABC$ 中，假如 $S_1, S_2$ 面積分別爲 441 和 440，試求 $\overline{AC}+\overline{CB}$。

答案：462

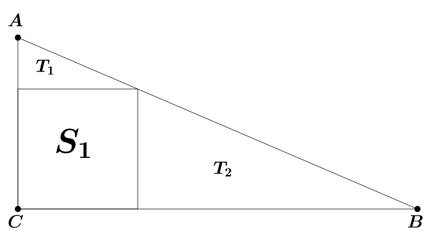


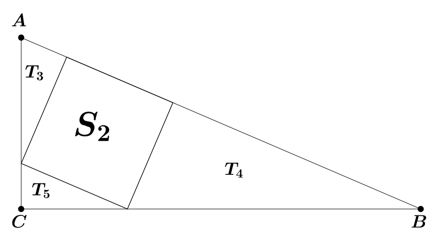




解答： 因爲所有在圖中的三角形都與三角形 $ABC$ 相似，可以利用面積比來解。在圖中 $\frac{T_1}{T_3}=\frac{T_2}{T_4}=\frac{441}{440}$。因此 $T_3=\frac{440}{441}T_1$ 並且 $T_4=\frac{440}{441}T_2$。此外三角形 $ABC$ 的面積等於 $T_1+T_2+441$ 與 $T_3+T_4+T_5+440$。

因此 $T_1+T_2+441=T_3+T_4+T_5+440$ 移項並解出 $T_5=1+T_1-T_3+T_2-T_4=1+\frac{T_1}{441}+\frac{T_2}{441}$。所以 $441T_5=441+T_1+T_2$。然而 $441+T_1+T_2$ 等於三角形 $ABC$ 的面積。此表示 $T_5$ 與 $ABC$ 間的面積比爲 441，並且之間邊長比爲 $\sqrt{441}=21$。所以 $\overline{AB}=21\sqrt{440}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$。因爲 $\overline{AB}^2+2(\overline{AC})(\overline{BC})=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2(\overline{AC})(\overline{BC})=(\overline{AC}+\overline{BC})^2$，可以利用 $\overline{AC}\times\overline{BC}$ 的值去求 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 值。

令 $h$ 表示三角形 $ABC$ 斜邊上的高，$ABC$ 斜邊上的高的減去 $T_5$ 的高與 $S_2$ 的高相等，因此 $h-\frac{1}{21}h=\sqrt{440}, h=\frac{21}{20}\sqrt{440}$，所以 $\overline{AB}\times h=\overline{AC}\times\overline{BC}=22\cdot 21^2$。因爲 $\overline{AB}^2+2\overline{AB}\times\overline{BC}=(\overline{AC}+\overline{BC})^2=21^2\times 22^2, \overline{AC}+\overline{BC}=21\times 22=462$。
$\square$




答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「 106 年秋季第 $X$ 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。