雙週一題網路數學問題徵答
106 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 106.11.03 公佈，106.11.17 中午 12 點截止

令 A 與 B 爲一半徑爲 2 的半圓弧的端點。此弧形藉由六個等距離的點 $C_1, C_2, \ldots, C_6$ 分成七個相等的弧。劃出 $\overline{AC_i}$ 或 $\overline{BC_i}$ 形式所有弦。令 n 爲這十二條弦長度乘積，試求 n 。

答案：28672

解答：【解法一】

令 O 爲 A 與 B 的中點。假設 C_1 接近 A 而不是 B。$\angle AOC_1 = \frac{\pi}{7}$。利用餘弦定理，

$$\overline{AC_1}^2 = 8 - 8\cos\frac{\pi}{7},\ \overline{AC_2}^2 = 8 - 8\cos\frac{2\pi}{7},\ \ldots,\ \overline{AC_6}^2 = 8 - 8\cos\frac{6\pi}{7}$$

所以 $n = (8^6)(1-\cos\frac{\pi}{7})(1-\cos\frac{2\pi}{7})\cdots(1-\cos\frac{6\pi}{7})$。它可以重新排列成 $n = (8^6)(1-\cos\frac{\pi}{7})(1-\cos\frac{6\pi}{7})\cdots(1-\cos\frac{3\pi}{7})(1-\cos\frac{4\pi}{7})$。

利用 $\cos a = -\cos(\pi - a)$，所以我們得

$$\begin{aligned}
n &= (8^6)\left(1-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\\
&= (8^6)\left(1-\cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(1-\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{7}\right)\\
&= (8^6)\left(\sin^2\frac{\pi}{7}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)
\end{aligned}$$

因爲 $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$，所以 $n = 8^6(\frac{\sqrt{7}}{8})^2 = 7(8^4) = 28672$。

【解法二】

注意到對於每個 k 的三角形 ABC_k 爲直角三角形。因此 $\overline{AC_k} \times \overline{BC_k}$ 乘積爲三角形 ABC_k 面積的兩倍。已知 $\overline{AB} = 4$，ABC_k 面積能表示成 $2c_k$，其中 c_k 爲從 C_k 到 $\overline{AB}$ 高的長度。因此我們得 $\overline{AC_k} \times \overline{BC_k} = 4c_k$。

由 c_k 的定義，我們觀察到 $c_k = 2\sin\frac{k\pi}{7}$。

從上兩個想法我們得到計算出來乘積爲 $8^6 \times \prod_{k=1}^{6}\sin\frac{k\pi}{7}$，其與方法一有相同解。□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「106 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。