

雙週一題網路數學問題徵答 106 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 106.10.20 公佈，106.11.03 中午 12 點截止

證明在任一個有限的二項展開式中，奇的二項係數的個數是 2 的冪。

解答：根據對 n 個特殊情況的考察，猜測 $(1+x)^n$ 中奇係數的個數為 2^k ，其中 k 是把 n 寫成二進制時非零數字的個數。

用一個例子足以說明在一般情況證明是如何進行的。考慮 $n = 13$ ，在二進制中， $13 = 1101_2 = 8 + 4 + 1$ 。因此，用上面建立的結論，

$$\begin{aligned}(1+x)^{13} &= (1+x)^{8+4+1} \\ &= (1+x)^8(1+x)^4(1+x) \\ &\equiv (1+x^8)(1+x^4)(1+x) \pmod{2}\end{aligned}$$

由此我們看出在 $(1+x)^{13}$ 中有 8 個奇的二項係數。這是因為將上面的等式右邊展開， $(1+x^4)(1+x)$ 有 4 項， $(1+x^8)(1+x^4+x+x^5)$ 有 8 項（一般地，如果 $1+x^n$ 乘以一個次數小於 n 的多項式 $P(x)$ ，所得結果是一個多項式，它的非零係數的個數是 $P(x)$ 的非零係數的個數的兩倍），證畢。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。