

雙週一題網路數學問題徵答
106 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 106.10.06 公佈，106.10.20 中午 12 點截止

證明對於任意正偶數 n ， $n^2 - 1$ 整除 $2^{n!} - 1$ 。

解答：令 $m = n+1$ ，我們需要證明 $m(m-2)$ 整除 $2^{(m-1)!} - 1$ 。因為 $\varphi(m)$ 整除 $(m-1)!$ ，我們有 $(2^{\varphi(m)} - 1) \mid (2^{(m-1)!} - 1)$ ，再藉由尤拉定理我們有 $m \mid (2^{\varphi(m)} - 1)$ 。接著有 $m \mid (2^{(m-1)!} - 1)$ 。同理 $(m-2) \mid (2^{(m-1)!} - 1)$ 。因為 m 為奇數，所以 $\gcd(m, m-2) = 1$ 並得到結論。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「106 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。