

雙週一題網路數學問題徵答  
104 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 105.06.10 公佈，105.06.24 中午 12 點截止

請找出所有的實數解  $(x, y, z)$ ：

$$2x + x^2y = y$$

$$2y + y^2z = z$$

$$2z + z^2x = x$$

解答：將方程式改寫為

$$\frac{2x}{1-x^2} = y$$

$$\frac{2y}{1-y^2} = z$$

$$\frac{2z}{1-z^2} = x$$

由此可知  $x \neq \pm 1$ ,  $y \neq \pm 1$ ,  $z \neq \pm 1$ 。觀察正切函數的二倍角公式

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

假設  $x = \tan \alpha$ ,  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ，則由改寫前兩式知  $y = \tan 2\alpha$ ,  $z = \tan 4\alpha$ ，由第三式可知  $\tan 8\alpha = \tan \alpha$ 。則存在整數  $k$  滿足  $8\alpha - \alpha = k\pi$ ，所以  $\alpha = \frac{k\pi}{7}$ ，且因為  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ，則可得到  $-3 \leq k \leq 3$ ，解即為

$$\left( \tan \frac{k\pi}{7}, \tan \frac{2k\pi}{7}, \tan \frac{4k\pi}{7} \right), \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「105 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。