

雙週一題網路數學問題徵答
104 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 105.05.27 公佈，105.06.10 中午 12 點截止

設 a, b, c 為滿足 $abc \geq 1$ 的正實數，證明

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca$$

解答：設 $a \leq b \leq c$ ，則 $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ ，由柴比雪夫不等式得

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3}$$

利用算幾不等式得

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq 1$$

利用柯西不等式得

$$(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ca)$$

因此

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{a+b+c}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt[3]{abc}(ab + bc + ca) \geq ab + bc + ca \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「105 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。