

雙週一題網路數學問題徵答 104 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 105.05.13 公佈，105.05.27 中午 12 點截止

設 8 位乘客隨意坐上 6 節車廂，使得恰有兩節車廂空著的坐車方式共有多少種？(不考慮上車順序)

答案：612360 種

解答：首先假設 6 節車廂中的第 5, 6 節車廂為空廂，而 S 為 8 個人隨意上 4 節車廂的所有上車方式所形成的集合，故 $|S| = 4^8$ 。令 A_i 表示第 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 節車廂為空廂時，8 人上車選擇車廂的方式。

則 A_1 表示第 1 節車廂為空廂時，8 人選擇剩下的 3 個車廂上車，所以有 $|A_1| = 3^8$ 種上車的方式。同理， $|A_2| = |A_3| = |A_4| = 3^8$ 。

而 $A_1 \cap A_2$ 表示第 1 節及第 2 節車廂為空廂，故 8 人選擇剩下的 2 個車廂上車，有 $|A_1 A_2| = 2^8$ 種上車的方式。同理， $|A_i A_j| = 2^8$, $1 \leq i < j \leq 4$ 。

以此類推，可得 $|A_i A_j A_k| = 1^8$, $1 \leq i < j < k \leq 4$, $|A_1 A_2 A_3 A_4| = 0$ 。因此在已知第 5, 6 節車廂為空廂時，題意即為求 $|\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}|$ 。

由排容原理

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}| &= |S| - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{i<j} |A_i A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i A_j A_k| + |A_1 A_2 A_3 A_4| \\ &= 4^8 - \binom{4}{1} \times 3^8 + \binom{4}{2} \times 2^8 - \binom{4}{3} \times 1^8 + 0 \\ &= 40824 \end{aligned}$$

但是因為在 6 節車廂中有 2 節為空廂的可能情形有 $\binom{6}{2} = 15$ 種，因此在 8 人上 6 節車廂的方式中，有 2 節車廂為空的上車方法數為 $40824 \times 15 = 612360$ 種。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「105 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。