

雙週一題網路數學問題徵答 104 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 105.04.29 公佈，105.05.13 中午 12 點截止

證明對於所有正整數 n 存在一 n 位數且可被 5^n 整除，其中此 n 位數的所有位數皆為奇數。

解答：我們藉由數學歸納法證明。這性質在 $n = 1$ 明顯是對的。假設 $N = a_1a_2 \dots a_n$ 可被 5^n 整除且所有位數皆為奇數。考慮這樣的數

$$N_1 = 1a_1a_2 \dots a_n = 1 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(1 \cdot 2^n + M)$$

$$N_2 = 3a_1a_2 \dots a_n = 3 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(3 \cdot 2^n + M)$$

$$N_3 = 5a_1a_2 \dots a_n = 5 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(5 \cdot 2^n + M)$$

$$N_4 = 7a_1a_2 \dots a_n = 7 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(7 \cdot 2^n + M)$$

$$N_5 = 9a_1a_2 \dots a_n = 9 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(9 \cdot 2^n + M)$$

這數字 $1 \cdot 2^n + M$, $3 \cdot 2^n + M$, $5 \cdot 2^n + M$, $7 \cdot 2^n + M$, $9 \cdot 2^n + M$ 以 5 為除數有相異的餘數。不然，其中某兩個的差會是 5 的倍數，而這是不可能的，因為 2^n 並非 5 的倍數，而且 1, 3, 5, 7, 9 其中任意的兩個差也不是 5 的倍數。這樣一來 N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 其中一個可被 $5^n \cdot 5$ 整除，如此數學歸納法完成。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「105 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。