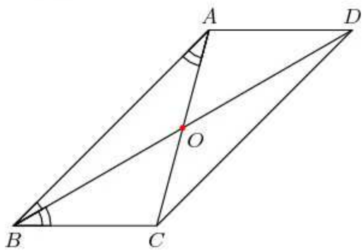
雙週一題網路數學問題徵答
104 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第四題：　　　　　105.04.15 公佈，105.04.29 中午 12 點截止

一平行四邊形 $ABCD$，令 O 爲對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點。角 CAB 與 DBC 爲角 DBA 的兩倍大，且角 ACB 的 r 倍與角 AOB 一樣大，試求不超過 $1000r$ 的最大整數。
答案：1285

解答：



【解法一】 令 $\theta = \angle DBA$，則 $\angle CAB = \angle DBC = 2\theta$, $\angle AOB = 180^\circ - 3\theta$ 與 $\angle ACB = 180^\circ - 5\theta$。由於 $ABCD$ 爲平行四邊形，因此 $\overline{OA} = \overline{OC}$, $\triangle ABO$ 與 $\triangle BCO$ 根據正弦定理得

$$\frac{\sin\angle CBO}{\overline{OC}} = \frac{\sin\angle ACB}{\overline{OB}} \quad 與 \quad \frac{\sin\angle DBA}{\overline{OC}} = \frac{\sin\angle BAC}{\overline{OB}}$$

兩式相除得

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(180^\circ - 5\theta)}{\sin 2\theta} \Longrightarrow \sin^2 2\theta = \sin 5\theta \sin\theta$$

利用畢氏定理與積化和差得

$$1 - \cos^2 2\theta = \cos 4\theta - \cos 6\theta$$

與二倍角、三倍角定理 ($\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$) 進一步的化簡得

$$4\cos^3 2\theta - 4\cos^2 2\theta - 3\cos\theta + 3 = (4\cos^2 2\theta - 3)(\cos 2\theta - 1) = 0$$

符合題目的唯一值爲

$$4\cos^2 2\theta - 3 = 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \theta = 15^\circ$$

此題答案爲

$$\lfloor 1000r\rfloor = \left\lfloor 1000\cdot\frac{180^\circ-3\theta}{180^\circ-5\theta}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{9000}{7}\right\rfloor = 1285$$

【解法二】 定義 θ 與上述相同。由於 $\angle CAB = \angle CBO$，因此 $\triangle COB \sim \triangle CBA$，所以 $\dfrac{\overline{CO}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \implies \overline{BC}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{CO} = 2\overline{CO}^2 \implies \overline{BC} = \overline{CO}\sqrt{2}$。$\triangle BOC$ 利用正弦定理得到

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CO}} = \frac{\sin(180^\circ-3\theta)}{\sin 2\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = \sqrt{2}$$

利用正弦兩次以及三倍角公式展開，我們得

$$2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta = \sin\theta(-4\sin^2\theta+3) \implies \sin\theta(4\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta-1)=0$$

根據二次方程式定理，我們知道 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8+4\cdot1\cdot4}}{8} = \dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$，所以 $\theta = 15^\circ$（因爲其它根不合理）。此答案同上題解。

【解法三】 我們將特別觀察 $\triangle ABC$，令 $\angle ABO = x$，所以 $\angle BAO = \angle OBC = 2x$，畫一條從 C 到 $\overline{AB}$ 的高至點 H，不失一般性，令 $\overline{AO} = \overline{CO} = 1$，則 $\overline{HO} = 1$，由於 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\angle OHA = 2x$。根據外角關係，$\angle COB = 3x$ 且 $\angle COH = 4x$，這代表 $\angle HOB = x$，使得 $\overline{HO} = \overline{HB} = 1$，由於爲 AA（$\angle HBC = \angle HOC = 3x$ 且反射到 $\angle OCB$），$\triangle OCB \sim \triangle BCA$。

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \implies 2 = \overline{BC}^2 \implies \overline{BC} = \sqrt{2}$$

則根據畢氏定理，$1^2 + \overline{HC}^2 = (\sqrt{2})^2 \implies \overline{HC} = 1$，使得 $\triangle HOC$ 爲等邊，則 $\angle HOC = 4x = 60^\circ \implies x = 15^\circ$。此題答案同上述解。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「105 年春季第 X 題解答」）。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。