

雙週一題網路數學問題徵答
104 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 105.04.01 公佈，105.04.15 中午 12 點截止

若

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2-1} + \frac{y^2}{2^2-3^2} + \frac{z^2}{2^2-5^2} + \frac{w^2}{2^2-7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{4^2-1} + \frac{y^2}{4^2-3^2} + \frac{z^2}{4^2-5^2} + \frac{w^2}{4^2-7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{6^2-1} + \frac{y^2}{6^2-3^2} + \frac{z^2}{6^2-5^2} + \frac{w^2}{6^2-7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{8^2-1} + \frac{y^2}{8^2-3^2} + \frac{z^2}{8^2-5^2} + \frac{w^2}{8^2-7^2} &= 1\end{aligned}$$

試求 $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ 。

答案：36

解答：【解法一】 由題意可得， $t = 4, 16, 36, 64$ 為下列函數的四個解：

$$\begin{aligned}&x^2(t-9)(t-25)(t-49) + y^2(t-1)(t-25)(t-49) \\ &+ z^2(t-1)(t-9)(t-49) + w^2(t-1)(t-9)(t-25) \\ &= (t-1)(t-9)(t-25)(t-49) - (t-4)(t-16)(t-36)(t-64)\end{aligned}$$

然而，方程式的兩邊皆為最多 3 次 t 的多項式，而且他們有 4 個解，因此，左右兩式的係數必相等。現在我們能代入 $t = 1$ 進去多項式。大多項會被消除，而且結果為

$$x^2(-8)(-24)(-48) = -(-3)(-15)(-35)(-63)$$

所以

$$x^2 = \frac{3 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 63}{8 \cdot 24 \cdot 48} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^{10}}$$

類似方法，我們能代入 $t = 9, 25, 49$ ，然而得到

$$\begin{aligned}y^2 &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 27 \cdot 55}{8 \cdot 16 \cdot 40} = \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{2^{10}} \\ z^2 &= \frac{21 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 39}{24 \cdot 16 \cdot 24} = \frac{3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{2^{10}} \\ w^2 &= \frac{45 \cdot 33 \cdot 13 \cdot 15}{48 \cdot 40 \cdot 24} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}{2^{10}}\end{aligned}$$

現在把它們加起來，

$$\begin{aligned}z^2 + w^2 &= \frac{3^2 \cdot 11 \cdot 13(7 + 5)}{2^{10}} = \frac{3^3 \cdot 11 \cdot 13}{2^8} \\x^2 + y^2 &= \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7(5 \cdot 7 + 3 \cdot 11)}{2^{10}} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17}{2^8}\end{aligned}$$

其為

$$\frac{3^2(3 \cdot 11 \cdot 13 + 5 \cdot 7 \cdot 17)}{2^8} = 3^2 \cdot 4 = 36$$

的總和。

【解法二】

如同解法一，我們知道

$$\begin{aligned}(t-1)(t-9)(t-25)(t-49) - x^2(t-9)(t-25)(t-49) \\- y^2(t-1)(t-25)(t-49) - z^2(t-1)(t-9)(t-49) \\- w^2(t-1)(t-9)(t-25) = (t-4)(t-16)(t-36)(t-64)\end{aligned}$$

現在 t^3 的係數在方程式兩邊必須相等，所以得到

$$1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2 = 4+16+36+64 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+w^2 = 36 \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「105 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。