雙週一題網路數學問題徵答
105 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 105.12.30 公佈，106.01.13 中午 12 點截止

找出所有的多項式 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ 滿足 $a_i = \pm 1$ $(0 \le i \le n,\ 1 \le n < \infty)$，使得它的根皆爲實數。

解答： 欲求的多項式具有 $a_0 = -1$ 爲具有 $a_0 = 1$ 之負數，因此僅需考慮 $a_0 = 1$。多項式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 所有根的平方和爲 $a_1^2 - 2a_2$，所有根的平方的乘積爲 a_n^2。若所有的根皆爲實數，我們可以應用算幾不等式得到

$$\frac{a_1^2 - 2a_2}{n} \ge \left(a_n^2\right)^{1/n}$$

等式只在所有根的平方相等時成立。在此例中不等式變成 $(1 \pm 2)/n \ge 1$ 或 $n \le 3$。注意 $n > 1$ 意味 $a_2 = -1$，且 $n = 3$ 意味所有零爲 ± 1，因此列出多項式爲：

$$\begin{aligned} &\pm(x-1), \quad \pm(x+1), \quad \pm(x^2+x-1), \quad \pm(x^2-x-1), \\ &\pm(x^3+x^2-x-1), \quad \pm(x^3-x^2-x+1) \end{aligned}$$

□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「105 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。