

雙週一題網路數學問題徵答 105 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 105.12.16 公佈，105.12.30 中午 12 點截止

設 a, b, c 為一個銳角三角形的三邊長，證明

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} \leq ab + bc + ca$$

其中 \sum_{cyc} 代表 (a, b, c) 循環總和，舉例 $\sum_{\text{cyc}} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$ 。

解答：由柯西-舒瓦茲不等式可知，對於 $x, y, z, w \geq 0$ ，有

$$\sqrt{xy} + \sqrt{zw} \leq \sqrt{(x+z)(y+w)}$$

因此

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \left(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - b^2} \sqrt{c^2 - a^2 + b^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(2a^2)(2c^2)} = \sum_{\text{cyc}} ac \quad \square \end{aligned}$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「105 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。