

雙週一題網路數學問題徵答  
105 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 105.12.02 公佈，105.12.16 中午 12 點截止

設  $r, s, t \in \mathbb{R}$  且  $1 \leq r \leq s \leq t \leq 4$ ，求

$$(r-1)^2 + \left(\frac{s}{r} - 1\right)^2 + \left(\frac{t}{s} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{t} - 1\right)^2$$

的最小值。

解答：【解法一】 由柯西不等式：

$$(r-1)^2 + \left(\frac{s}{r} - 1\right)^2 + \left(\frac{t}{s} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{t} - 1\right)^2 \geq \frac{\left(r + \frac{s}{r} + \frac{t}{s} + \frac{4}{t} - 4\right)^2}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\left(r + \frac{s}{r} + \frac{t}{s} + \frac{4}{t} - 4\right)^2}{4}$$

由算幾不等式：

$$\frac{\left(r + \frac{s}{r} + \frac{t}{s} + \frac{4}{t} - 4\right)^2}{4} \geq \frac{\left(4\sqrt[4]{r \times \frac{s}{r} \times \frac{t}{s} \times \frac{4}{t}} - 4\right)^2}{4} = \frac{(4\sqrt[4]{4} - 4)^2}{4} = \frac{(4\sqrt{2} - 4)^2}{4} = 12 - 8\sqrt{2}$$

其中當  $r = \frac{s}{r} = \frac{t}{s} = \frac{4}{t}$  時兩不等式等號都成立，即  $r = \sqrt{2}$ ， $s = 2$ ， $t = 2\sqrt{2}$ ，因此

$$(r-1)^2 + \left(\frac{s}{r} - 1\right)^2 + \left(\frac{t}{s} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{t} - 1\right)^2 \geq 12 - 8\sqrt{2}$$

【解法二】

首先令  $0 < a < b$ ，求  $x$  在  $a \leq x \leq b$  上

$$f(x) = \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{b}{x} - 1\right)^2$$

的極小值。令  $x/a = z$  和  $b/a = c$ ，則

$$f(x) = g(z) = (z-1)^2 + \left(\frac{c}{z} - 1\right)^2$$

若  $g'(z) = 0$ ，則

$$z^4 - z^3 + cz - c^2 = (z^2 - c)(z^2 - z + c) = 0$$

只有一個正根  $z = \sqrt{c}$ 。由於  $0 < a < b, c > 1, \sqrt{c} > 1$  和

$$g(1) = g(c) = (c - 1)^2 = (\sqrt{c} - 1)^2(\sqrt{c} + 1)^2 > 2(\sqrt{c} - 1)^2 = g(\sqrt{c})$$

因此  $g(z)$  在  $1 \leq z \leq c$  的最小值發生在  $z = \sqrt{c}$ 。所以  $f(x)$  在  $a \leq x \leq b$  的最小值發生在  $x = a\sqrt{b/a} = \sqrt{ab}$ ，則給定  $r, s$  和  $t$  函數的最小值發生在  $r = \sqrt{s}$ ,  $t = \sqrt{4s} = 2r$  和  $s = \sqrt{rt} = \sqrt{2}r$ ，則  $r = \sqrt{2}, s = 2$  和  $t = 2\sqrt{2}$ ，因此最小值為  $4(\sqrt{2} - 1)^2 = 12 - 8\sqrt{2}$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「105 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。