雙週一題網路數學問題徵答
105 年度第 1 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第五題：　　105.11.18 公佈，105.12.02 中午 12 點截止

假設 a 與 2 和 5 互質，證明對任意正整數 n 會有一個 a 的正整數次方以 10 進位展開時是以 $\underbrace{000\ldots01}_{n\text{ 個 }0,\ 1}$ 結束。

解答：考慮 10^n 個項 $a, a^2, a^3, \ldots, a^{10^n}$，取其以 10^n 爲模的餘數，而餘數 0 將不會發生，因爲 a 與 10 互質。因此只會有 (10^n-1) 種可能的餘數

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10^n-1$$

所以會有兩項 a_i 和 a_k $(i<k)$ 的餘數相同，故其差將可以被 10^n 除盡：

$$10^n \mid a^k-a^i \Leftrightarrow 10^n \mid a^i(a^{k-i}-1)$$

因爲 $\gcd(10^n, a^i)=1$，我們可以推得 $10^n \mid a^{k-i}-1$ 或者是可改寫爲 $a^{k-i}-1 = q\cdot 10^n,\ q\in\mathbb{N}$，則 $a^{k-i}=q\cdot 10^n+1$，因此 a^{k-i} 以 $000\ldots01$ (n 位數)結束。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「105 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。