

雙週一題網路數學問題徵答 105 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 105.10.21 公佈，105.11.04 中午 12 點截止

在一個大小尺寸為 2×31 的棋盤上，用 31 個 2×1 尺寸的矩形覆蓋，問有多少種覆蓋法？

解答：設利用 2×1 尺寸矩形覆蓋 $2 \times n$ 尺寸棋盤，共有 a_n 種覆蓋法，求出 a_n 一般解即可得：

- (1) 當 $n = 1$ 時 \Rightarrow 橫向覆蓋 $\rightarrow a_1 = 1$ 。
- (2) 當 $n = 2$ 時 \Rightarrow 直向或橫向覆蓋 $\rightarrow a_2 = 2$ 。
- (3) 當 $n = 3$ 時 $\Rightarrow a_3 = 3$ 。
- (4) $2 \times n$ 尺寸矩形，覆蓋方式可分成以下二種情形：

- (i) 第一個 2×1 矩形直向覆蓋，剩餘 $2 \times (n - 1)$ 尺寸矩形，共有 a_{n-1} 種方法覆蓋。
- (ii) 第一個 2×1 矩形橫向覆蓋，剩餘 $2 \times (n - 2)$ 尺寸矩形，共有 a_{n-2} 種方法覆蓋。

故 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ (此結果與樓梯問題同)，可推得

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

所以 $a_{31} = 2178309$ 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「105 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。