雙週一題網路數學問題徵答
105 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 105.10.7 公佈，105.10.21 中午 12 點截止

令 p 爲一質數且 $p>5$，證明 $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$。

解答：**【解法一】** 注意 $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$。由費馬小定理，我們有 $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ 且 $p^4 \equiv 1 \pmod 5$。因爲一正整數與 2^4 互質若且唯若它爲奇數則 $\varphi(2^4) = 2^3$。藉由尤拉定理我們有 $p^8 \equiv 1 \pmod{16}$。因此 $p^8 \equiv 1 \pmod m$ 對於 $m = 3,\ 5,\ 16$ 推得 $p^8 \equiv \pmod{240}$。 □

【解法二】 題目可改寫爲：證明對於所有的質數 $p>5$， p^8-1 可被 240 整除。已知 $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ ，且 $p^8-1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1)$，所以如果可以證明 p^8-1 可以被 $2^4 = 16, 3, 5$ 整除，即可證明此題。

(1) 因爲 $(p-1),\ (p+1),\ (p^2+1),\ (p^4+1)$ 皆必爲偶數，因此 p^8-1 可以被 16 整除。

(2) 令質數 $p = 3k \pm 1,\ k$ 爲正偶數，則 $(p+1)(p-1) = p^2-1$ 必可被 3 整除，因此 p^8-1 也可以被 3 整除。

(3) 令質數 $p = 5m \pm 1$ 或 $5m \pm 2m$，m 爲正偶數，則 $(p+1)(p-1)(p^2+1)) = p^4-1$ 必可被 5 整除，因此 p^8-1 也可以被 5 整除。

由上述考慮可以得知對於所有的質數 $p>5$， p^8-1 可被 240 整除，證畢。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「105 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。