雙週一題網路數學問題徵答
105 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第一題： 105.09.23 公佈，105.10.07 中午 12 點截止

對所有質數 p，證明是否存在無窮多個正偶數 k 使得 p^2+k 是合成數。

答案：

解答： 這答案是肯定的。首先記著 $p=2,\ p^2+k$ 永遠是合成數對於所有正偶數 k。

下一步我們記著若 $p>3$，則 $p^2\equiv 1 \pmod 3$。如此若 k 爲一正偶數滿足 $k\equiv 2 \pmod 3$，則 p^2+k 爲一合成數對於所有質數 $p>3$ (p^2+k 大於 3 且可被 3整除)。

最後我們記著 $3^2+k\equiv 0 \pmod 5$ 若 $k\equiv 1 \pmod 5$。

將以上的論證放在一起，我們可以總結對於所有正整數 k 有

$$\begin{cases} k\equiv 0 \pmod 2, \\ k\equiv 2 \pmod 3, \\ k\equiv 1 \pmod 5, \end{cases} \tag{1}$$

滿足這個問題的條件。藉由特性 (*) 我們考慮 $\pmod{(2,3,5)} = \pmod{30}$。並不困難去確認對於所有正整數 k 且 $k=26 \pmod{30}$ 滿足這系統，及其問題條件。

(*) 我們有 $a\equiv b \pmod{m_i},\ i=1,\ldots,k$ 若且唯若

$$a\equiv b \pmod{(m_1,\ldots,\ m_k)}$$

特別是，若 $m_1,\ldots,\ m_k$ 爲兩兩互質，則 $a\equiv b \pmod{m_i},\ i=1,\ldots,k$ 若且唯若 $a\equiv b \pmod{m_1\cdots m_k}$ 。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「105 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。