雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 104.06.12 公佈，104.06.26 中午 12 點截止

試求並證明：所有正整數 n 使得 $2^n + 12^n + 2011^n$ 是完全平方數。 答案：1

解答： 若 $n = 1$，則 $2^n + 12^n + 2011^n = 2025 = 45^2$ 是完全平方數。

若 $n > 1$ 且爲奇數，則 $2^n + 12^n + 2011^n \equiv 0 + 0 + (-1)^n \equiv 3 \pmod 4$。

因爲所有的完全平方數有 $0,\ 1 \pmod 4$，則我們知道 $2^n + 12^n + 2011^n,\ n > 1$ 且 n 爲奇數時，不是完全平方數。

若 $n = 2k$ 爲偶數，則 $(2011^k)^2 < 2^{2k} + 12^{2k} + 2011^{2k} = 4^k + 144^k + 2011^{2k} < 2011^k + 2011^k + 2011^{2k} < (2011^k + 1)^2$。

因爲 $(2011^k)^2 < 2^n + 12^n + 2011^n < (2011^k + 1)^2$，則我們知道 $2^n + 12^n + 2011^n,\ n = 2k$ 不是完全平方數。

因此只有 $n = 1$ 時，$2^n + 12^n + 2011^n$ 是完全平方數。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「104 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。