雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

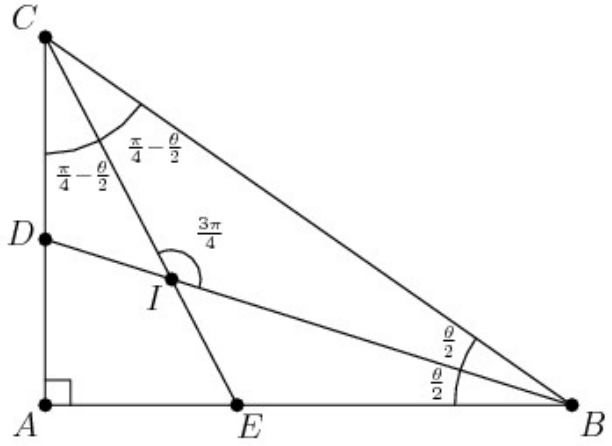
第七題： 104.05.29 公佈，104.06.12 中午 12 點截止

假設 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90^\circ$，點 D, E 分別落在 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 上，使得

$$\angle ABD = \angle DBC,\ \angle ACE = \angle ECB,\ \overline{BD} \text{ 與 } \overline{CE} \text{ 相交於點 } I$$

確定是否有可能 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BI}$, $\overline{ID}$, $\overline{CI}$, $\overline{IE}$ 長度皆爲整數。 答案：不可能

解答： 由圖形知 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 135^\circ$，



利用畢氏定理，得到

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \tag{1}$$

利用 $\triangle BIC$ 作餘弦定理，得到

$$\begin{aligned} &\overline{BC}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 - 2\overline{BI}\cdot\overline{CI}\cdot\cos 135^\circ \\ \Rightarrow\ &\overline{BC}^2 - \overline{BI}^2 - \overline{CI}^2 = \sqrt{2}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI} \\ \Rightarrow\ &\sqrt{2} = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{BI}^2 - \overline{CI}^2}{\overline{BI}\cdot\overline{CI}} \end{aligned} \tag{2}$$

因爲 $\sqrt{2}$ 是無理數，但兩個整數相除的商應該是有理數，因此矛盾。

由 (1), (2) 得到 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ 不可能皆爲整數，故得證。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨

爲「104 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。