雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 104.05.15 公佈，104.05.29 中午 12 點截止

令 $a,\ b,\ c$ 爲正實數，證明：

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

解答： 由柯西不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyc}\frac{a^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5a+b}\right)\\
\geq&\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a^2+b^2+b^2+b^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc}a(5a+b)+b(5a+b)+b(5a+b)+b(5a+b)}\\
=&\frac{\left(4a^2+4b^2+4c^2\right)^2}{(8a^2+8b^2+8c^2)+(16ab+16bc+16ca)}\\
\geq&\frac{16\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(8a^2+8b^2+8c^2)+(8a^2+8b^2)+(8b^2+8c^2)+(8c^2+8a^2)}\\
=&\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)
\end{aligned}$$

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「104 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。