雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 104.05.01 公佈，104.05.15 中午 12 點截止

若三角形的頂點落在拋物線 $y = x^2$ 上，則稱爲『拋物線三角形』。試證：對所有非負整數 n，存在一個奇數 m 及一個拋物線三角形的三頂點的坐標皆爲整數，其面積爲 $(2^n m)^2$。 答案：

解答： 假設三角形三頂點爲 (a, a^2), (b, b^2), (c, c^2)，利用面積公式得到

$$A = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{2}$$

假設 $a < b < c$, $A > 0$，若 a, b, c 減去相同的常數，則面積仍然不變，所以可令 $a = 0$，得到 $A = \frac{1}{2}bc(c-b)$。

根據 n 是非負整數，m 爲正奇數，$A = \frac{1}{2}bc(c-b) = (2^n m)^2$，設 $b' = 4b$, $c' = 4c$, $A' = 4^3 A = 8^2 A = (2^{n+3}m)^2$。

因此若我們在 $n = 0$, 1, 2 得到解，則其餘解可利用 b, c 的 4 倍解得。

設 $b = 1$, $c = 2$，則 $A = 1 = (2^0 \cdot 1)^2 \Rightarrow n = 0$；

設 $b = 1$, $c = 9$，則 $A = 9 \cdot 4 = (2^1 \cdot 3)^2 \Rightarrow n = 1$；

設 $b = 1$, $c = 5$，則 $A = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$；得到 $b' = 10$, $c' = 50$, $A' = 10 \cdot 20 \cdot 50 = 100^2 = (2^2 \cdot 5^2)^2 \Rightarrow n = 2$。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「104 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。