雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 104.04.17 公佈，104.05.01 中午 12 點截止

設平面坐標上有一點 $P(a,a^2)$，令 $\ell(P)$ 代表通過 P 且斜率爲 $2a$ 的直線。考慮任意三角形頂點 $P_1=(a_1,a_1^2),\ P_2=(a_2,a_2^2),\ P_3=(a_3,a_3^2)$，使得通過 $P_1,\ P_2,\ P_3$ 之直線 $\ell(P_1),\ \ell(P_2),\ \ell(P_3)$ 的三個交點形成一個正三角形 Δ。試求：所有滿足此性質 Δ 的中心點軌跡。

答案：準線 $y=-\frac{1}{4}$

解答： 所有點 $P=(a,a^2)$ 皆落在拋物線 $y=x^2$ 上，此拋物線的焦點 $F=\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 且準線 $d: y=-\frac{1}{4}$，我們要證明軌跡爲 d。

假設任意點 P 在 p，則直線 $\ell(P)$ 是在 P 到 p 的切線，這是因爲 $\ell(P)$ 包含點 P 且 $\left[\frac{d}{dx}\right]x^2=2x$。

對任意點 P 在 p 設 P' 是從 P 到 d 的垂足，因此 $\overline{PP'}=\overline{PF}$。假設 q 是 $\overline{P'F}$ 的垂直平分線，因爲 $\overline{PP'}=\overline{PF}$ 且 q 通過 P。假設 K 是 q 上的任意點且令 K' 是 K 到 d 的垂足，因此直角三角形 $KK'P'$, $\overline{KK'}$ 爲股且 $\overline{KK'}<\overline{KP'}=\overline{KF}$，因此 K 不落在 p 上。這可推得 q 是在點 P 上對 p 的切線，即 $q=\ell(P)$。

Lemma 1: 若點 P 在 p 上，則 $\ell(P)$ 是 $\overline{P'F}$ 的垂直平分線。

Lemma 2: 若 F 落在 $\triangle XYZ$ 的外接圓上，其垂心爲 H，則 F 對 $\overleftrightarrow{XY}, \overleftrightarrow{XZ}, \overleftrightarrow{YZ}$ 的對稱點會與 H 共線。

【證明】
假設 $F,\ H$ 對 $\overleftrightarrow{YZ}$ 的對稱點爲 $C',\ J$，對 $\overleftrightarrow{XY}$ 的對稱點爲 $A',\ I$，則 $\angle JYZ=\angle HYZ=\angle HXZ=\angle JXZ=m(JZ)/2$，其中 $m(JZ)$ 爲 $\widehat{JZ}$ 的圓心角。這可推得 J 落在 $\triangle XYZ$ 的外接圓上，同樣地，I 也落在外接圓上。因此 $\angle C'HJ=\angle FJH=m(XF)/2$,$\angle A'HX=\angle FIX=m(FX)/2$，得到 $\angle C'HJ=\angle A'HX$。因爲 $J,\ H,\ X$ 共線，所以推得 $C',\ H,\ A'$ 亦共線，同樣地，F 對 $\overleftrightarrow{XZ}$ 的對稱點亦落在此直線上，故得證。

假設 $A,\ B,\ C$ 爲 p 上的三點，令 $\ell(A)\cap\ell(B)=X, \ell(A)\cap\ell(C)=Y, \ell(B)\cap\ell(C)=Z$，且令 $A'',\ B'',\ C''$ 分別是 $\overline{A'F},\ \overline{B'F},\ \overline{C'F}$ 的中點。因爲 $\overleftrightarrow{A''B''}\parallel\overline{A'B'}=d,\ \overleftrightarrow{B''C''}\parallel\overline{B'C'}=d$，所以 $A'',\ B'',\ C''$ 共線。

由 Lemma 1，我們可以得到 $A'',\ B'',\ C''$ 是 F 分別對 $\overline{XY},\ \overline{XZ},\ \overline{YZ}$ 的垂足，因此由西姆松定理 (Simson Line Theorem) 得到 F 落在 $\triangle XYZ$ 的外接圓上。若 H 爲 $\triangle XYZ$ 的垂心，則由 Lemma 2 得到 H 落在 $\overleftrightarrow{A'C'}=d$ 上，推得軌跡是 d 的一個子集。

因爲我們宣稱此軌跡爲 d，因此我們仍然需要證明對於任意在 d 上的 H 存在一個正三角形其中心爲 H 使得直線包含三角形的邊且在 p 相切，因此設 H 是任意在 d 上的點且令中心爲 H 且通過 F 的圓 O，則 A 是一個 d 與 O 的交點。假設 $\angle HFA = 3\theta$，且構造在相同半平面通過 F 的 $\overleftrightarrow{HF}$ 與 $\overleftrightarrow{HF}$ 夾 2θ。

可以說射線相交 O 於 B 非 F 且設 q 是 $\overline{HB}$ 的垂直平分線。因爲 $\angle HFB = 2\theta$, $\angle HFA = 3\theta$，所以 $\angle BFA = \theta$，推得 $\angle AHB = 2\theta$。因爲 $\overline{HF}$, $\overline{HB}$ 有共同半徑，所以 $\triangle HFB$ 爲等腰三角形及 $\angle HBF = \angle HFB = 2\theta$。令 P_1' 是 F 對 q 的對稱點，因此 $2\theta = \angle FBH = \angle C'HB$，推得 $\angle C'HB = \angle AHB$。因此得到 P_1' 落在 $\overleftrightarrow{AH} = d$ 上，其代表 q 是 $\overline{FP_1'}$ 的垂直平分線。

假設 q 交 O 於 Y, Z 且設 X 是 O 上相對 B 的點，令 $\overline{HB}$ 交 q 於 M，因此 $HM = HB/2 = HZ/2$，推得 $\triangle HMZ$ 是 30-60-90 的直角三角形且 $\angle ZHB = 60^\circ$。因此 $\angle ZHY = 120^\circ$, $\angle ZXY = 60^\circ$，因爲 $\overline{ZX} = \overline{ZY}$，所以 $\triangle ZXY$ 是中心爲 H 的正三角形。

由 Lemma 2, 得到 F 分別對 $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{XZ}$ 的對稱點爲 P_2', P_3' 落在 d 上，設 $\overleftrightarrow{YZ}$ 交通過 P_1' 與 d 垂直的線於 P_1，且 $\overleftrightarrow{XY}$ 交通過 P_2' 與 d 垂直的線於 P_2，且 $\overleftrightarrow{XZ}$ 交通過 P_3' 與 d 垂直的線於 P_3，因此 P_1', P_2', P_3' 有 $\overline{FP_i} = \overline{P_iP_i'}$, $i = 1, 2, 3$ 及 P_1, P_2, P_3 在 p 上。

由 lemma 1, $\ell(P_1) = \overleftrightarrow{YZ}$, $\ell(P_2) = \overleftrightarrow{XY}$, $\ell(P_3) = \overleftrightarrow{XZ}$，故得證。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「104 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。