雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 104.04.03 公佈，104.04.17 中午 12 點截止

設 a, b 都是大於 1 的實數。試求：$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$ 的最小值。

解答： 由算幾不等式，可得當 $a>1$，且 $b>1$ 時：

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\cdot\frac{b^2}{a-1}}=2\left(\frac{a}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b-1}}\right) \tag{1}$$

又對任一正實數 $x>1$，因爲 $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$，所以 $x^2\geq 4(x-1)$，即得 $x\geq 2\sqrt{x-1}$，也就是 $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2$ 恆成立，且僅當 $x=2$ 時等號成立。所以由 (1) 式可得

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 2\cdot 2\cdot 2=8$$

而且僅當 $a=b=2$ 時，$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}=8$ 爲最小值。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「104 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。