雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 104.03.20 公佈，104.04.03 中午 12 點截止

是否存在整數 $a,\ b$ 使得 $a^5b+3,\ ab^5+3$ 都是完全立方數。 答案：不存在

解答： 利用 a^5b+3 是完全立方數，但 ab^5+3 不是完全立方數的矛盾法證明。

完全立方數除以 9 的餘數只能是 $0,\ 1,\ -1$，因此若 $a^5b+3 \equiv 0,\ 1,\ -1 \pmod 9$，則 $a^5b \equiv 5,\ 6,\ 7 \pmod 9$。

若 $a^5b \equiv 6 \pmod 9$，則記作 $3 \mid b$。(這是因爲若 $3 \mid a$，則 $a^5b \equiv 0 \pmod 9$) 因此 $ab^5 \equiv 0 \pmod 9,\ ab^5+3 \equiv 3 \pmod 9$，矛盾。

否則不是 $a^5b \equiv 5 \pmod 9$ 就是 $a^5b \equiv 7 \pmod 9$，因爲 a^6b^6 是完全六次方數且不是 a 就是 b 含有因數 3, $a^6b^6 \equiv 1 \pmod 9$。若 $a^5b \equiv 5 \pmod 9$，則

$$a^6b^6 \equiv (a^5b)(ab^5) \equiv 5ab^5 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow ab^5 \equiv 2 \pmod 9$$

同樣地，若 $a^5b \equiv 7 \pmod 9$，則

$$a^6b^6 \equiv (a^5b)(ab^5) \equiv 7ab^5 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow ab^5 \equiv 4 \pmod 9$$

因此 $ab^5+3 \equiv 5,\ 7 \pmod 9$，矛盾。

因此不存在此整數。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「 104 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。