雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 103.05.30 公佈，103.06.13 中午 12 點截止

找出所有符合 $P(x^2+1)=(P(x))^2+1$ 及 $P(0)=0$ 的多項式 $P(x)$。

答案：$P(x)=x$

解答： 當 $x=0,\ 1,\ 2,\ 5,\ \ldots$ 代入多項式時，可以發現

$$\begin{aligned}
P(1) &= P(0^2+1) = P(0)^2+1 = 1\\
P(2) &= P(1^2+1) = P(1)^2+1 = 2\\
P(5) &= P(2^2+1) = P(2)^2+1 = 5\\
P(26) &= P(5^2+1) = P(5)^2+1 = 26
\end{aligned}$$

繼續這種迭代模式爲下一個數是前一個數的平方加 1，就能知道對於任意無窮多個 x，皆滿足 $P(x)=x$。因此由代數基本定理，有限次數的多項式 $P(x)-x$ 必須是零，所以 $P(x)=x$，對於所有 x。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「103 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。