雙週一題網路數學問題徵答
101 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 103.04.18 公佈，103.05.02 中午 12 點截止

設 v 與 w 爲方程式 $z^{1997}-1=0$ 中選取兩個不同的根，求 $\sqrt{2+\sqrt{3}}\le|v+w|$ 的機率？ 答案：83/499

解答：**【解法一】** 因爲

$$z^{1997}=1=1(\cos 0+i\sin 0)$$

由棣美弗定理，可得

$$z=\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)$$

其中 $k=0,1,\ldots,1996$。設 v 爲對應到 $\theta=\frac{2\pi m}{1997}$ 的根且 w 爲對應到 $\theta=\frac{2\pi n}{1997}$ 的根，則

$$\begin{aligned}|v+w|&=\sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi m}{1997}\right)+\cos\left(\frac{2\pi n}{1997}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi m}{1997}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{1997}\right)\right)^2}\\&=\sqrt{2+2\cos\left(\frac{2\pi m}{1997}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{1997}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi m}{1997}\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{1997}\right)}\end{aligned}$$

所以 $\cos\left(\frac{2\pi m}{1997}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{1997}\right)+\sin\left(\frac{2\pi m}{1997}\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{1997}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$，再利用差角公式，化簡爲

$$\cos\left(\frac{2\pi m}{1997}-\frac{2\pi n}{1997}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$|m-n|\le\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1997}{2\pi}$，所以 $|m-n|$ 值有 $\lfloor\frac{1997}{12}\rfloor=166$ 種可能。因爲 m 與 n 差不能比 166 大，意指給定 m 值，n 有 332 個 (大於 m 的 166 個，與小於 m 的 166 個) 滿足不等式。由於全部有 1997 種可能值，但 m 與 n 必須不同，因此有 1996 種，其機率爲 $\frac{332}{1996}=\frac{83}{499}$。

【解法二】 因爲 $z^{1997}=1$ 的根爲 $\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)$，其中 $k=0,1,\ldots,1996$，所以其根爲以複數平面的原點爲中心的正 1997 邊形頂點。考慮在不失一般

性，假設 $v=1$，則

$$\begin{aligned}
|v+w|^2 &= \left|\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+1\right|^2 \\
&= \left|\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+1\right]+i\sin\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)\right|^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)+1+\sin^2\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) \\
&= 2+2\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right)
\end{aligned}$$

因爲 $|v+w|^2 \geq 2+\sqrt{3}$，所以可由上面不等式知等價於 $\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$。當 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi k}{1997} \leq \frac{\pi}{6}$ 成立，滿足 k 的值爲 $-166, -165, \ldots, 165, 166$ (但 0 會使得 u, v 兩個根重複，所以不包含 0)。因爲由於 k 有 1996 個可能，但只有 332 個成立，其機率爲 $\frac{332}{1996}=\frac{83}{499}$。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「103 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。