雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 103.03.21 公佈，103.04.04 中午 12 點截止

假如 a 與 b 爲整數使得 x^2-x-1 爲 $ax^{17}+bx^{16}+1$ 的因式，試求 a 值？答案：987

解答：【**解法一**】 讓我們用反推法。令 $F(x)=ax^{17}+bx^{16}+1$，而且令 $P(x)$ 爲多項式使得 $P(x)(x^2-x-1)=F(x)$。首先，因爲 $P(0)(0-0-1)=F(0)$ 所以 $P(x)$ 的常數項必須爲 -1。現在，我們有 $(x^2-x-1)(c_1x^{15}+c_2x^{14}+\cdots+c_{15}x-1)$，其中 c_{15} 爲一未知係數，由於 $F(x)$ 沒有 x 項，所以 $c_{15}=-1$ 必須爲眞，現在我們去求 c_{14}，因爲 $(x^2-x-1)(\cdots+c_{14}x^2+x-1)=\cdots+0x^2+\cdots$，所以 $c_{14}=-2$，以類似的方式推得 $c_{13}=3,\ c_{12}=-5,\ c_{11}=8$，則可發現：$P(x)$ 的係數爲斐波那契數列並且有週期性的正負號，所以 $a=c_1=F_{16}$，其中 $F(16)$ 標記爲第 16 個斐波那契數，因此 $a=987$。

【**解法二**】 令 F_n 表示斐波那契數列的第 n 個數，$F_1=F_2=1,\ F_3=2,\ \ldots,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

$$x^2=x+1=F_2x+F_1$$
$$x^3=x\cdot x^2=x(F_2x+F_1)=F_2x^2+F_1x=F_2(x+1)+F_1x=(F_2+F_1)x+F_2=F_3x+F_2$$
$$x^4=x\cdot x^3=x(F_3x+F_2)=F_3x^2+F_2x=F_3(x+1)+F_2x=(F_3+F_2)x+F_3=F_4x+F_3$$

由以上式子類推可得，$x^n=F_n\cdot x+F_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&0=ax^{17}+bx^{16}+1=a(F_{17}\cdot x+F_{16})+b(F_{16}\cdot x+F_{15})+1\\
\Rightarrow\quad &(aF_{17}+bF_{16})\cdot x+(aF_{16}+bF_{15}+1)=0,\ x\notin\mathbb{Q}\\
\Rightarrow\quad &aF_{17}+bF_{16}=0 \text{ 且 } aF_{16}+bF_{15}+1=0\\
\Rightarrow\quad &a=F_{16},\ b=-F_{17}\\
\Rightarrow\quad &a=987,\ b=-1597
\end{aligned}$$

【**解法三**】 我們可用除法去尋找是否有特別模式存在，則可知此餘項將會確定爲零，並可解出 a，而且每一次的餘項，會成爲斐波那契數列，完成了這過程，我們得到餘項爲 $(F_{16}+F_{17}a)x+F_{15}b+F_{16}a+1=0$，由於此 x 的係數必須爲零，給了我們兩條方程式，$F_{16}b+F_{17}a=0$ 與 $F_{15}b+F_{16}a+1=0$，解得 $a=987$。

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「103 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。