雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第一題： 103.02.21 公佈，103.03.07 中午 12 點截止

找出正整數 n 使得方程式

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0 \tag{1}$$

有有理根的充要條件。 答案：$n = 1$

解答： 如果 n 爲偶數，則方程式不會有實根，因爲 x 的每一項皆非負，且不會同時消去。如果 $n = 1$，很顯然的只有一個根 $x = -4$。假設 n 是大於等於 3 的奇數。展開方程式的各項並整理，展開結果爲一個首項係數爲 1、其餘項的係數爲非負整數、常數項爲 2^{n+1} 的方程式。因此由有理根定理，唯一有可能的根爲 $-2^t,\ t = 0,\ 1,\ 2$。當 $x = -1$ 時，給定的表示式中三個項數皆爲奇數，因此 -1 不是方程式的根。將 $x = -2$ 代入，得到 $(-2)^n + 0 + 4^n \neq 0$，所以 -2 也不是方程式的根。如果將 $x = -2^{p+1}$ 代入方程式，當 $p \geq 1$，則 (1) 的左式將變成

$$2^n[-2^{pn} + (1-2^p)^n + (1+2^p)^n] = 2^n\left[-2^{pn} + 2\left\{1 + \binom{n}{2}2^{2p} + \binom{n}{4}2^{4p} + \cdots\right\}\right]$$

括號中的表示式是 $\equiv 2 \pmod 4$ (假設 $n \geq 3$)，所以 -2^{p+1} 不是方程式的根當 $p \geq 1$。因此當 $n > 1$，方程式是沒有根的。綜合上述，關係式 (1) 有有理根若且唯若 $n = 1$。

【註】 當 $n > 2$ 的根，是著名的費馬最後定理的反例。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「103 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。