雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 103.12.26 公佈，104.01.09 中午 12 點截止

證明對所有正整數 n 大於 1 時

$$\frac{3n+1}{2n+2} < \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n < 2$$

解答： 對 $n > 1$ 與 $x > 0$ 方程式 x^n 是一凸函數(圖形是凹向上)，所以它的積分會比梯形法則估計來的少，因此

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{0}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}\right)^n\right]$$

乘上 n 再加上 $1/2$ 可以得到

$$\frac{3n+1}{2n+2} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2} < \left[\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \left(\frac{n}{n}\right)^n\right]$$

所求的上界估計可以藉由考慮細分成爲黎曼和(且等號左右邊都加上 1)，下列的式子給了更精準得估計，由 $1 - x < e^{-x}$ 對所有的 x 我們有

$$\left(1 - \frac{i}{n}\right)^n \leq e^{-i}$$

對 $0 \leq i \leq n$ 因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n}\right)^n &\leq 1 + e^{-1} + \cdots + e^{-(n-1)} \\ &\leq \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1} < 2\end{aligned}$$

且 $\lim_{n\to\infty}(1 - i/n)^n = e^{-i}$ 就更容易得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{e}{e-1} \qquad \square$$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「103 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。