

雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 103.12.12 公佈，103.12.26 中午 12 點截止

若有一個多項式 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2(x-b)$ ，其中 $a \neq b$ ，請導出餘式的公式。 答
案： $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}(x-a)^2 - \frac{f'(a)}{b-a}(x-a)(x-b)$

解答：【解法一】 從 $f(x)$ 除以一個三次多項式，餘式 $R(x)$ 中 x 的次數最高為 2，假
設 $R(x) = Ax^2 + Bx + C$ 。則有

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)Q(x) + Ax^2 + Bx + C$$

和

$$f'(x) = 2(x-a)(x-b)Q(x) + (x-a)^2Q'(x) \\ + (x-a)^2(x-b)Q'(x) + 2Ax + B$$

從這些關係得

$$f(a) = Aa^2 + Ba + C \\ f(b) = Ab^2 + Bb + C \\ f'(a) = 2Aa + B$$

解得 A, B, C 為

$$A = \frac{1}{(b-a)^2}[f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)] \\ B = \frac{-1}{(b-a)^2}[2a(f(b) - f(a)) - (b^2 - a^2)f'(a)] \\ C = \frac{1}{(b-a)^2}[(b-a)^2f(a) + a^2(f(b) - f(a)) + ab(a-b)f'(a)]$$

此時

$$R(x) = \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ (f(b) - f(a) - (b-a)f'(a))x^2 \right. \\ \left. - (2a(f(b) - f(a)) + (b^2 - a^2)f'(a))x \right. \\ \left. + ((b-a)^2f(a) + a^2(f(b) - f(a)) + ab(a-b)f'(a)) \right\}$$

假如寫成以下式子會更容易確認

$$R(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2}(x-a)^2 - \frac{f'(a)}{b-a}(x-a)(x-b)$$

【解法二】 我們可以寫成

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2g(x) \quad (1)$$

其中 g 代表多項式，且 $g(x) = g(b) + (x-b)h(x)$ 其中 h 是一個多項式。
那麼

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2g(b) + (x-a)^2(x-b)h(x)$$

因此可決定餘式為

$$f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2g(b)$$

(1) 用 b 代替 x 即得到 $g(b)$ 且餘式為

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)) \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「103 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。