雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 103.11.28 公佈，103.12.12 中午 12 點截止

證明實係數的多項式方程

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

不可能全是實根。

解答： 設 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 爲 $P(x) = 0$ 的根。$r_1, \ldots, r_n$ 都不是 0。在 $P(x) = 0$ 的兩邊同除以 x^n 並令 $y = \frac{1}{x}$ 得

$$Q(y) \equiv y^n + y^{n-1} + y^{n-2} + a_3y^{n-3} + \cdots + a_{n-1}y + a_n = 0.$$

注意當且僅當 $\frac{1}{r}$ 是 $Q(y) = 0$ 的根時，r 是 $P(x) = 0$ 的根。因此，$Q(y) = 0$ 的根是 $s_1, s_2, \ldots, s_n$，這裡 $s_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, \ldots, n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = -1$$
$$\sum_{i<j} s_i s_j = 1$$

從而

$$\sum_{i=1}^{n} {s_i}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} s_i s_j = 1 - 2 = -1.$$

這個等式說明不是全體 s_i 都是實數，也就是說不是全體 r_i 都是實數。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「 103 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。