

# 雙週一題網路數學問題徵答

## 103 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 103.11.14 公佈，103.11.28 中午 12 點截止

一蟲子從一等邊三角形一頂點出發。在每次移動時，從另兩個頂點選擇一點，並且沿著三角形的邊爬行到那個頂點。試求此蟲子經過十次移動後回到它的出發頂點的機率為何？

答案：171/512

解答：【解法一】

經過  $n$  次移動，對於這隻蟲有  $2^n$  的可能路徑。經過  $n$  次移動後回到起始點的關鍵在於，在第  $n-1$  次移動後不能回到出發點。

- 移動 1 次後回到出發點的可能路徑為 0 個。
- 移動 2 次後回到出發點的可能路徑為  $2^1 - 0$  個。
- 移動 3 次後回到出發點的可能路徑為  $2^2 - (2^1 - 0)$  個。
- ⋮
- 移動 10 次後回到出發點的可能路徑為

$$2^9 - (2^8 - (2^7 - (2^6 - (2^5 - (2^4 - (2^3 - (2^2 - 2))))))) = 342 \text{ 個}$$

所以機率為  $342/1024 = 171/512$ 。

【解法二】

考慮在三角形上移動的方向可分為順時鐘和逆時鐘這兩個方向，然而讓蟲子必須回到起始點，則順時鐘的移動次數必須為 3 的倍數，即

$$\text{順時鐘的次數} - \text{逆時鐘的次數} \equiv 0 \pmod{3}$$

由於總共移動 10 次，因此 (順時鐘的次數, 逆時鐘的次數) = (5, 5), (8, 2), (2, 8) 有這三組可能解。

在第一種情況下，蟲子移動 10 次其中順時鐘包含 5 次，共有  $\binom{10}{5}$  種路徑；在第二種情形，小蟲選擇順時鐘移動 8 次，共有  $\binom{10}{8}$  種路徑；並且第三種情形順時鐘 2 次，共有  $\binom{10}{2}$  種路徑；因此回到原點的總方法數為  $\binom{10}{5} + \binom{10}{8} + \binom{10}{2} = 252 + 45 + 45 = 342$ 。由於蟲子到每一點有兩種方法，有  $2^{10}$  種路線能選擇，並且我們所求機率為  $\frac{342}{2^{10}} = \frac{171}{512}$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「103 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。