

雙週一題網路數學問題徵答

103 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 103.10.31 公佈，103.11.14 中午 12 點截止

對函數 f 定義為 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ，其中 a, b, c 和 d 為非零實數，有性質 $f(19) = 19$ ， $f(97) = 97$ 且除了 $\frac{-d}{c}$ 以外對於所有值 $f(f(x)) = x$ ，試求唯一不在 f 值域範圍內的值？
答案：58

解答：【解法一】 首先，我們利用此特性對於所有在定義域的 x ， $f(f(x)) = x$ 。代入此函數的定義，我們得 $\frac{a \frac{ax+b}{cx+d} + b}{c \frac{ax+b}{cx+d} + d} = x$ ，簡化後為

$$\frac{(a^2 + bc)x + b(a + d)}{c(a + d)x + (bc + d^2)} = \frac{ex + f}{gx + h} = x$$

為了簡化此分數的 x ，我們必須有 $f = g = 0$ 與 $e = h \neq 0$ 。第二個不能為真，由於我們給定 a, b, c, d 為非零。這代表 $a = -d$ ，所以 $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ 。

唯一不在此函數範圍的值为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a}{c}$ 。求 $\frac{a}{c}$ ，我們利用此函數給定的兩個值。得到 $2(97)a + b = 97^2c$ 與 $2(19)a + b = 19^2c$ 。從第一個代入第二個方程式將消去 b ，並且結果為 $2(97 - 19)a = (97^2 - 19^2)c$ ，所以

$$\frac{a}{c} = \frac{(97 - 19)(97 + 19)}{2(97 - 19)} = 58$$

或者我們可以利用 $f(f(-b/a)) = -b/a$ 去求得 $a = -d$ 。

【解法二】 首先，我們先看到 $e = \frac{a}{c}$ 為此函數的水平漸近線，且由於這是一個線性函數之上的線性函數，此唯一的不在函數 f 範圍的數為 e 。 $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b - \frac{cd}{a}}{cx+d} + \frac{a}{c}$ 。不失一般性，令 $c = 1$ ，所以此函數變成 $\frac{b - \frac{d}{a}}{x+d} + e$ 。

(考慮到極限為 ∞) 根據給定， $f(f(\infty)) = \infty$ 。 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$ ，所以 $f(e) = \infty$ 。 $f(x) \rightarrow \infty$ 為 x 的垂直漸進線，在 $-\frac{d}{c} = -d$ 。由於 $e = -d$ ，代入所給定的，我們得

$$17 = \frac{b - \frac{d}{a}}{17 - e} + e$$

$$97 = \frac{b - \frac{d}{a}}{97 - e} + e$$

$$b - \frac{d}{a} = (17 - e)^2 = (97 - e)^2$$

$$17 - e = \pm(97 - e)$$

化簡後我們能去除正根，所以 $e = 58$ 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「103 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。