雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 103.10.17 公佈，103.10.31 中午 12 點截止

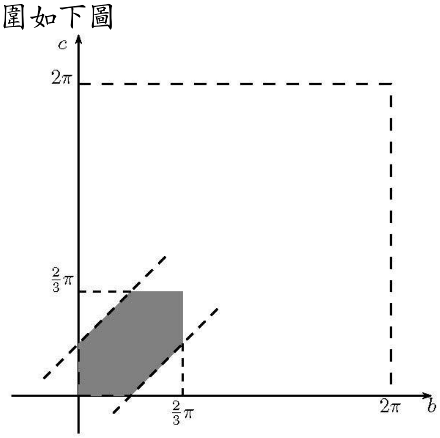
由一圓的圓周上任取三點，試求在此三點中，任意兩點間的距離皆會小於圓半徑的機率爲何？

答案：$\frac{1}{12}$

解答：**【解法一】** 取一圓心爲 $O(0,0)$ 的單位圓，令 P, Q, R 分別爲圓周上任取的三點，且 $\overset{\frown}{AP}= a$, $\overset{\frown}{AQ}= b$, $\overset{\frown}{AR}= c$，其中 $A(1,0)$ 爲圓上一定點，$a, b, c \in [0, 2\pi)$。不失一般性假設 $\overset{\frown}{AP}= a = \frac{\pi}{3}$，因欲求三點間彼此的距離皆須小於半徑，則

$$0 \le b \le \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \le c \le \frac{2\pi}{3}, \quad 且 \quad |b-c| \le \frac{\pi}{3}$$

故 b 與 c 所推得之範圍如下圖



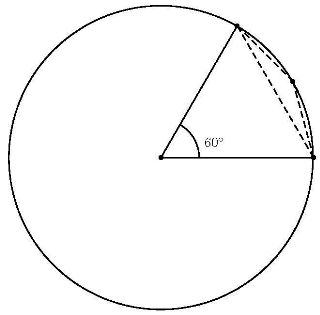
而斜線部分的面積爲

$$\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 - 2 \times \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right] = \frac{\pi^2}{3}$$

因此所求機率爲

$$\frac{\frac{\pi^2}{3}}{(2\pi)^2} = \frac{1}{12}$$

【解法二】 在圓上任取三點，任兩點間的距離皆會小於半徑，即表示在所取的三點中，距離最遠的兩點與圓心所形成的圓心角須小於 60° (因若圓心角爲 60° 時，呈現一正三角形，則兩取點間的距離即爲半徑)，如下圖所示



不失一般性假設所選取三點爲 A, B, C，在圓心角爲 $60°$ 的圓周上隨機的散佈，若以順時針方向來觀察，則第一個點可能有 3 種不同的標號，則剩餘的兩點可選取的機率分別爲 $\frac{60°}{360°}=\frac{1}{6}$，故所求機率爲

$$\underbrace{3}_{\text{第一個點}}\times\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2}_{\text{其餘兩點}}=\frac{1}{12} \qquad \square$$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「 103 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。