雙週一題網路數學問題徵答
103 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 103.10.03 公佈，103.10.17 中午 12 點截止

設 $P(z)=z^8+\left(4\sqrt{3}+6\right)z^4-\left(4\sqrt{3}+7\right)$，求在複數平面上，由 $P(z)=0$ 的根為頂點所圍成的八邊形的最小周長？ 答案：$8\sqrt{2}$

解答： 將 $P(z)=0$ 作因式分解，可得

$$P(z)=\left(z^4-1\right)\left(z^4+\left(4\sqrt{3}+7\right)\right)$$

所以 $z^4=1$ (即 $z=e^{i\frac{n\pi}{2}}$, $n=1,\,2,\,3,\,4$) 或

$$z^2=\pm i\sqrt{4\sqrt{3}+7}=e^{i\frac{(2n+1)\pi}{2}}\left(\sqrt{3}+2\right)$$

即

$$z=e^{i\frac{(2n+1)\pi}{4}}\sqrt{\sqrt{3}+2}=e^{i\frac{(2n+1)\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad n=1,\,2,\,3,\,4$$

以極座標來看，可知每一個根的輻角相差 $\frac{n\pi}{4}$，所以此八個點為等邊八邊形的頂點，則找兩個相鄰點坐標 1 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)(1+i)$ 相減後，取長度為

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{2}$$

即為等邊八邊形邊長，所以周長為 $8\sqrt{2}$。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「103 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。