雙週一題網路數學問題徵答
101 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 102.05.24 公佈，102.06.07 中午 12 點截止

設 $K(x,y,z)$ 表示三邊長爲 x, y 與 z 的三角形面積。對於任意兩個三角形，其邊長分別爲 a, b, c 與 a', b', c'。試證明

$$\sqrt{K(a,b,c)}+\sqrt{K(a',b',c')}\le\sqrt{K(a+a',b+b',c+c')}$$

並決定相等時的情況。

解答： 設 $s=(a+b+c)/2$, $t=s-a$, $u=s-b$, $v=s-c$，而相同的 $s'=(a'+b'+c')/2$, $t'=s'-a'$, $u'=s'-b'$, $v'=s'-c'$。對於以上這些正數 s, t, u, v, s', t', u', v' 由海龍公式得到

$$K(a,b,c)=\sqrt{stuv}$$
$$K(a',b',c')=\sqrt{s't'u'v'}$$

我們要證明之不等式將改寫成

$$\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}\le\sqrt[4]{(s+s')(t+t')(u+u')(v+v')} \tag{1}$$

底下給一有幫助之類似的不等式

$$\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'}\le\sqrt{(x+x')(y+y')},\quad x,\ y,\ x',\ y'>0 \tag{2}$$

首先我們觀察出 (2) 式即是將向量 $(\sqrt{x},\sqrt{x'})$ 與 $(\sqrt{y},\sqrt{y'})$ 套用到柯西不等式裡，再加上 $(\sqrt{xy'}-\sqrt{x'y})^2\ge 0$ 或者是將 xy' 與 $x'y$ 套用到算幾不等式裡。接著將 $x=\sqrt{st}$, $x'=\sqrt{s't'}$, $y=\sqrt{uv}$, $y'=\sqrt{u'v'}$ 套用到 (2) 式裡，再應用 (2) 到此新不等式的右邊，則可得到以下式子

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{stuv}+\sqrt[4]{s't'u'v'}&\le\sqrt{\left(\sqrt{st}+\sqrt{s't'}\right)\left(\sqrt{uv}+\sqrt{u'v'}\right)}\\&\le\sqrt{\sqrt{(s+s')(t+t')}\sqrt{(u+u')(v+v')}}\end{aligned}$$

因在上式不等式的最右側與 (1) 式相等，即我們已證明了 (1) 不等式成立。(2)式中等號成立的充分必要條件爲 $\sqrt{x}:\sqrt{x}'=\sqrt{y}:\sqrt{y}'$，即是 $x:x'=y:y'$。因此在 (1) 式中等號成立的充分必要條件爲 $s:t:u:v=s':t':u':v'$。因此，我們可以得到在最原本的不等式中，等號成立之充分必要條件爲 a, b, c 與 a', b', c' 是成比例的。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「102 年春季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。