

# 雙週一題網路數學問題徵答

## 101 年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 102.05.10 公佈，102.05.24 中午 12 點截止

令  $P$  是頂點為  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的凸多邊形之內部或是邊上的點，試找出  $P$  使得

$$f(P) = \sum_{i=1}^n |P - A_i|$$

達到最大值。該最大值為何？

解答：令  $\varphi$  是收集凸多邊形內部或是邊上的點的集合。首先我們注意到  $P \rightarrow f(P)$  是凸函數。原因是，如果  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ，則對於任意的  $P, Q \in \varphi$ ，我們有  $\alpha P + \beta Q \in \varphi$ ，且

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= \sum_{i=1}^n |\alpha(P - A_i) + \beta(Q - A_i)| \\ &\leq \alpha \sum_{i=1}^n |P - A_i| + \beta \sum_{i=1}^n |Q - A_i| \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

更進一步地，對於任何的點  $P \in \varphi$  是頂點  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的凸組合，即存在  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$  使得  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  且  $P = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ 。因此，由  $f$  的凸性，

$$f(P) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(A_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \max_{i=1,2,\dots,n} f(A_i) = \max_{i=1,2,\dots,n} f(A_i)$$

這說明當  $P \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  使得  $f(P) = \max_{i=1,2,\dots,n} f(A_i)$  時， $f(P)$  達到最大值。  $\square$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「102 年春季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。