雙週一題網路數學問題徵答
101 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 102.04.26 公佈，102.05.10 中午 12 點截止

令 d_n 是 2×2 矩陣 $A^n - I$, $n = 1, 2, \ldots$ 中四個元素的最大公因數，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad 和 \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

證明 $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$。

解答： 首先利用數學歸納法去證明存在整數 $a_n, b_n > 0$ 使得

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{bmatrix}$$

當 $n = 1$ 時顯然成立，設 $n = k$ 時成立，則 $n = k+1$ 時

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k \cdot A &= \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ 2b_k & a_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3a_k + 4b_k & 2a_k + 3b_k \\ 2(2a_k + 3b_k) & 3a_k + 4b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ 2b_{k+1} & a_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

因此藉由數學歸納法得證。因爲 $\det A^n = (\det A)^n = (3\times 3 - 4\times 2)^n = 1$，我們可以得到 $a_n^2 - 1 = 2b_n^2$。接著 $a_n - 1$ 爲 $2b_n^2$ 的因式，亦即 $2b_n^2 = m \times (a_n - 1)$, $m \in \mathbb{Z}^+$。由定義可得 $d_n = \gcd(a_n - 1, b_n)$，所以 $2d_n^2 = \gcd(2(a_n-1)^2, 2b_n^2) \geq a_n - 1$。由 (1) 可以得到 $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n > 3a_n$，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，因此 $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「101 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。