雙週一題網路數學問題徵答
101 年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 102.04.12 公佈，102.04.26 中午 12 點截止

計算

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$$

解答：**【解法一】** 由複數方根性質，可知多項式 $f(x)=x^7-1$ 的根爲

$$\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\quad \text{其中 } k=0,1,2,\ldots,6$$

由韋達定理，可得根的總和爲 0，所以實部的和爲零，即

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

由於

$$\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)=-\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta-\pi) \tag{1}$$

此方程可改寫爲

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=0$$

而整理後可得

$$2\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=1$$

因此

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

【解法二】 設 $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$，則 $z^7+1=0$。因爲 $z\neq-1$ 和 $z^7+1=(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)=0$，則表示 $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$，

所以移項後，可得 $z(z^2-z+1)=\frac{1}{1-z^3}$，則

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7} &= \operatorname{Re}(z^3-z^2+z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z^3}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{7}-i\sin\frac{3\pi}{7}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{3\pi}{14}-2i\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\sin\frac{3\pi}{14}\left(\sin\frac{3\pi}{14}-i\cos\frac{3\pi}{14}\right)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{14}+i\cos\frac{3\pi}{14}}{2\sin\frac{3\pi}{14}}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\cos\frac{3\pi}{14}}{2\sin\frac{3\pi}{14}}\right)=\frac{1}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「101 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。