雙週一題網路數學問題徵答
101 年度第 2 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第一題：　　102.03.01 公佈，102.03.15 中午 12 點截止

考慮有 7 個相異的正整數，其值皆不大於 1706，證明此 7 個數中存在 3 個數分別爲 a, b, c，使得 $a < b + c < 4a$。

解答： 將此 7 個數按遞增排序如下 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_7 \le 1706$，已知如果存在一個 $i = 2, 3, \ldots, 6$，使得 $a_{i+1} < 4a_i - a_1$，則 $a_i < a_1 + a_{i+1} < 4a_i$，因此得證。

另一方面，假設如果對於所有的 $i = 2, 3, \ldots, 6$，$a_{i+1} \ge 4a_i - a_1$ 皆成立，則

$$
\begin{aligned}
a_3 &\ge 4a_2 - a_1 \ge 4(a_1 + 1) - a_1 = 3a_1 + 4 \\
a_4 &\ge 4a_3 - a_1 \ge 4(3a_1 + 4) - a_1 = 11a_1 + 16 \\
a_5 &\ge 4a_4 - a_1 \ge 4(11a_1 + 16) - a_1 = 43a_1 + 64 \\
a_6 &\ge 4a_5 - a_1 \ge 4(43a_1 + 64) - a_1 = 171a_1 + 256 \\
a_7 &\ge 4a_6 - a_1 \ge 4(171a_1 + 256) - a_1 = 683a_1 + 1024 \ge 1707
\end{aligned}
$$

因此 a_7 與題目的條件互相矛盾，所以得證。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「102 年春季第 *X* 題解答」)。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。