

# 雙週一題網路數學問題徵答 102 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 103.01.03 公佈，103.01.17 中午 12 點截止

給定  $T_1 = 2$ ,  $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$ ,  $n > 0$ 。證明：如果  $m \neq n$ ,  $T_m$  和  $T_n$  沒有大於 1 的公因數。

解答：最初的幾個成員的序列為  $T_1 = 2$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 7$ 。我們應該用歸納法去證明

$$T_{n+1} = 1 + \prod_{i=1}^n T_i, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

當  $n = 1$  成立，假設當  $n = k$  也成立，所以

$$\begin{aligned} T_{k+2} &= 1 + T_{k+1}(T_{k+1} - 1) \\ &= 1 + T_{k+1} \left[ \prod_{i=1}^k T_i \right] \\ &= 1 + \prod_{i=1}^{k+1} T_i \end{aligned}$$

(第一步由給定的遞歸，第二由歸納假設。)這就完成了歸納證明 (1)。

現在假設  $m \neq n$ ，而  $m < n$ ，則 (1) 表示  $T_m$  除以  $T_n - 1$ ，所以  $T_m$  和  $T_n$  互質，這就是 (1)。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「101 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。

# Index

微積分-無窮級數-遞迴數列的級數和  
2013秋季-雙週一題-8, 1