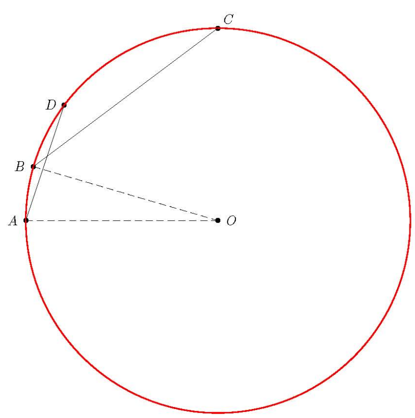
雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 1 學期

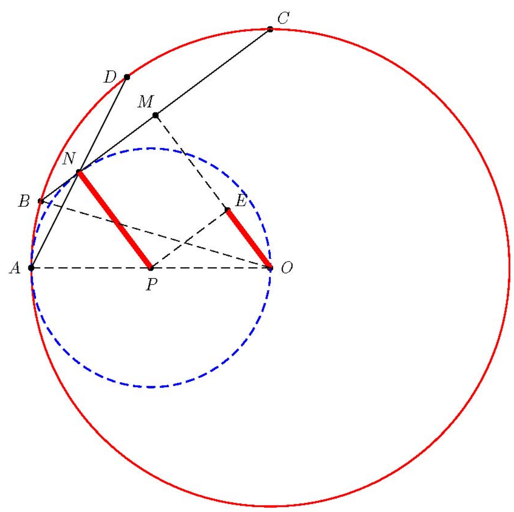
主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 102.12.20 公佈，103.01.03 中午 12 點截止

如圖，一個圓的兩弦相交，其中 B 點在劣弧 $\overset{\frown}{AD}$ 上。設圓的半徑為 5, $\overline{BC} = 6$，且 $\overline{AD}$ 被 $\overline{BC}$ 平分，而由 A 點出發的弦只有 $\overline{AD}$ 能被 $\overline{BC}$ 平分，試求劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所對應圓心角的正弦值。



解答： 設 A 為圓 O 上任一固定點，且 $\overline{AD}$ 為圓 O 之一弦(其中 D 點為動點)。而 $\overline{AD}$ 之中點 N 之軌跡為以 $\overline{AO}$ 為直徑之圓。又因為 $\overline{BC}$ 弦平分 $\overline{AD}$，所以 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 之交點必在圓 P 上，即表示 $\overline{BC}$ 弦會通過此交點，且為圓 P 之切線，如下圖所示



取 $\overline{BC}$ 之中點爲 M，則 $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$，所以由直角三角形 OMB 得

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BM}^2} = 4$$

故 $\tan\angle BOM = \frac{\overline{BM}}{\overline{OM}} = \frac{3}{4}$。由圖可知

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \overline{OE} + \overline{EM} = \overline{PN} + \overline{OP} \cdot \cos\angle AOM \\ &= \overline{OP}\,(1 + \cos\angle AOM)\end{aligned}$$

所以

$$\cos\angle AOM = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} - 1 = \frac{2\overline{OM}}{\overline{OA}} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

則 $\tan\angle AOM = \frac{4}{3}$。又因爲 $\angle AOB = \angle AOM - \angle BOM$，所以由正切函數之差角公式得

$$\begin{aligned}\tan\angle AOB &= \frac{\tan\angle AOM - \tan\angle BOM}{1 + \tan\angle AOM \cdot \tan\angle BOM} \\ &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{7}{24}\end{aligned}$$

故 $\sin\angle AOB = \frac{7}{\sqrt{7^2+24^2}} = \frac{7}{25}$。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「101 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。

Index