雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 102.12.06 公佈，102.12.20 中午 12 點截止

設 z 為任意複數，求滿足

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z$$

的所有複數函數 f。

解答： 因為對所有 z，

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z \tag{1}$$

將式子 (1) 中的 z 換成 $1-z$，可得

$$f(1-z) + (1-z)f(z) = 2 - z \tag{2}$$

將式子 $(1) - (2) \times z$，可得

$$(1 - z + z^2)f(z) = 1 - z + z^2$$

所以假設 $1 - z + z^2 \neq 0$，也就是 $z \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$，則 $f(z) = 1$。設 $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $\overline{\alpha} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，可得 $\alpha + \overline{\alpha} = 1,\ \alpha\overline{\alpha} = 1$。設 $f(\alpha) = 1 + \beta,\ f(\overline{\alpha}) = 1 + \gamma,\ z = \alpha$，則式子 (1) 可化簡為

$$\begin{aligned}\beta + \alpha\gamma &= f(\alpha) - 1 + \alpha\left(f(\overline{\alpha}) - 1\right) = f(\alpha) + \alpha f(\overline{\alpha}) - \alpha - 1 \\ &= f(\alpha) + \alpha f(1-\alpha) - (\alpha + 1) = f(z) + zf(1-z) - (z+1) = 0\end{aligned}$$

所以 $\gamma = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\overline{\alpha}\beta$，其中 β 為任意的複數。(當 $z = \overline{\alpha}$ 時，也可以得到相同的結果) 因此所有滿足式子 (1) 的複數函數 f 為

$$\begin{aligned}&f(\alpha) = 1 + \beta, \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \forall \beta \in \mathbb{C} \\ &f(\overline{\alpha}) = 1 - \overline{\alpha}\beta \\ &f(z) = 1, \quad z \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨

爲「 101 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。