雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 1 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 102.11.22 公佈，102.12.06 中午 12 點截止

計算

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$$

的值，其中 F_m 爲費伯那西數列的第 m 項，滿足 $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{m+1} = F_m + F_{m-1},\ m \geq 2$。

解答： 由歸納法證明下列等式成立

$$F_{2m}F_{m-1} - F_{2m-1}F_m = (-1)^m F_m, \quad m \geq 2 \tag{1}$$

當 $m = k-1$ 時，

$$F_{2k-2}F_{k-2} - F_{2k-3}F_{k-1} = (-1)^{k-1}F_{k-1}$$

當 $m = k$ 時，

$$F_{2k}F_{k-1} - F_{2k-1}F_k = (-1)^k F_k$$

假設當 $m = k+1$ 時

$$\begin{aligned}
F_{2k+2}F_k - F_{2k+1}F_{k+1} &= \left(F_{2k+1} + F_{2k}\right)F_k - F_{2k+1}\left(F_k + F_{k-1}\right) \\
&= F_{2k}F_k - F_{2k+1}F_{k-1} \\
&= \left(F_{2k-1} + F_{2k-2}\right)F_k - \left(F_{2k} + F_{2k-1}\right)F_{k-1} \\
&= \left(F_{2k-1}F_k - F_{2k}F_{k-1}\right) + \left(F_{2k-2}F_k - F_{2k-1}F_{k-1}\right) \\
&= \left((-1)^{k+1}F_k\right) + \left(F_{2k-2}\left(F_{k-1} + F_{k-2}\right) - \left(F_{2k-2} + F_{2k-3}\right)F_{k-1}\right) \\
&= \left((-1)^{k+1}F_k\right) + \left((-1)^{k-1}F_{k-1}\right) \\
&= (-1)^{k+1}\left(F_{k-1} + F_k\right) \\
&= (-1)^{k+1}F_{k+1}
\end{aligned}$$

故 (1) 式成立。

令 $m = 2^{k-1}$，得到

$$F_{2^k}F_{2^{k-1}-1} - F_{2^k-1}F_{2^{k-1}} = F_{2^{k-1}}, \quad k \geq 2$$

或

$$\frac{1}{F_{2^k}} = \frac{F_{2^{k-1}-1}}{F_{2^{k-1}}} - \frac{F_{2^k-1}}{F_{2^k}}, \quad k \geq 2$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} \\
&= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_3}{F_4} \right) + \left(\frac{F_3}{F_4} - \frac{F_7}{F_8} \right) + \cdots + \left(\frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \left(1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) \\
&= \frac{7-\sqrt{5}}{2} \qquad \square
\end{aligned}
$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「101 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。