

雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 102.11.8 公佈，102.11.22 中午 12 點截止

設 a, b, c 為一個三角形的三邊長，證明

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

解答：使用 Ravi's 轉換： $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ ，可得

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 2(xy^3 + yz^3 + zx^3) - 2(xy^2z + x^2yz + xyz^2)$$

則不等式等價於 $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$ ，再由柯西不等式

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)(y + z + x) \geq (x + y + z)^2$$

接著將兩邊的公因式 $x + y + z$ 消去，即可得證。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨為「101 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。

Index

—

2013秋季-雙週一題-4, 1