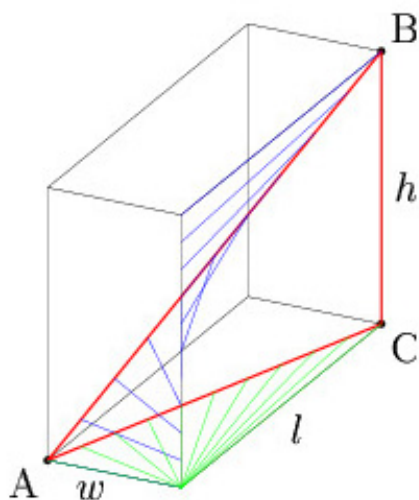


# 雙週一題網路數學問題徵答 102 年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 102.10.25 公佈，102.11.8 中午 12 點截止

一長方體  $P$  內某一固定對角線與不相交邊之間最短距離分別為  $2\sqrt{5}$ ,  $\frac{30}{\sqrt{13}}$  與  $\frac{15}{\sqrt{10}}$ ，試求  $P$  的體積。



解答：在上圖中，選擇離最近平行於  $\overline{BC}$  的邊來討論。所有藍色直線垂直於  $\overline{BC}$  的對邊，線的另一端位於主對角線  $\overline{AB}$  上。綠色線為藍色線映射在底面上，所有綠色線從一角畫出而且延伸到  $\overline{AC}$ ，且它們與所對應的藍色線等長。所以我們想找  $\overline{AC}$  與此角最短的距離，其為  $\frac{wl}{\sqrt{w^2+l^2}}$ 。所以我們有：

$$\begin{aligned}\frac{wl}{\sqrt{w^2+l^2}} &= \frac{10}{\sqrt{5}} \\ \frac{wh}{\sqrt{w^2+h^2}} &= \frac{30}{\sqrt{13}} \\ \frac{lh}{\sqrt{l^2+h^2}} &= \frac{15}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

看到根的關係  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{10}$ ，其分別為  $\sqrt{1^2+2^2}$ ,  $\sqrt{2^2+3^2}$ ,  $\sqrt{1^2+3^2}$ （這告

訴我們這些邊的比例為 1 : 2 : 3，但是還不足以解題)。

$$\begin{aligned}\frac{l^2 w^2}{l^2 + w^2} &= \frac{1}{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{w^2}} = 20 \\ \frac{h^2 w^2}{h^2 + w^2} &= \frac{1}{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{w^2}} = \frac{900}{13} \\ \frac{h^2 l^2}{h^2 + l^2} &= \frac{1}{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2}} = \frac{45}{2}\end{aligned}$$

我們將上述方程式上下顛倒得到在  $\frac{1}{h^2}$ ,  $\frac{1}{l^2}$  與  $\frac{1}{w^2}$  下的直線方程組：

$$\begin{aligned}\frac{1}{l^2} + \frac{1}{w^2} &= \frac{45}{900} \\ \frac{1}{h^2} + \frac{1}{w^2} &= \frac{13}{900} \\ \frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2} &= \frac{40}{900}\end{aligned}$$

我們得  $h = 15$ ,  $l = 5$ ,  $w = 10$ 。所以  $V = 5 \cdot 10 \cdot 15 = 750$ 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem@gmail.com](mailto:nsysu.problem@gmail.com) (主旨為「102 年秋季第 X 題解答」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。