雙週一題網路數學問題徵答
102 年度第 1 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第二題： 102.10.11 公佈，102.10.25 中午 12 點截止

設 $\lfloor x \rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數，試問方程式

$$4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$$

的實數解有多少個？

解答：**【解法一】** 令 $f(x) = 4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51$ 及 I_n 爲介於 $n \le x \le n+1$ 對整數 n 的區間。很明顯地，當 $x < 0$, $f(x) > 0$。對 $x \ge 0$, $f(x)$ 在 I_n 爲遞增函數，因爲當 $x \in [n, n+1)$ 裡，$-40\lfloor x \rfloor + 51 = -40n + 51$ 是常數。因此，$f(x)$ 在每個 I_n 裡，至多存在一個根若且唯若 $f(n) \le 0$ 且 $f(n+1-\epsilon) > 0$ 對很小的 $\epsilon > 0$。因爲，當 ϵ 接近 0, $f(n+1-\epsilon)$ 接近 $g(n) = 4(n+1)^2 - 40n + 51$，所以檢查 $g(n) > 0$ 就足夠了。

$$\begin{aligned} f(n) \le 0 &\Leftrightarrow (2n-3)(2n-17) \le 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} \le n \le \frac{17}{2} \end{aligned}$$

所以只要去檢查 I_n 對 $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$，檢查後可發現當 $n = 2,\ 6,\ 7,\ 8$, $g(n) > 0$，所以有 4 個根。

【解法二】 因爲 $40\lfloor x \rfloor$ 是偶數，$40\lfloor x \rfloor - 51$ 是奇數，所以 $4x^2$ 必須爲奇數，假設爲 $2k+1$，則 $x = \sqrt{2k+1}/2$。代回原式，可得

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{2k+1}}{2} \right\rfloor = \frac{k+26}{20}$$

所以 $k \equiv 14 \bmod 20$，更進一步，

$$\frac{k+26}{20} \le \frac{\sqrt{2k+1}}{2} < \frac{k+26}{20} + 1$$

將這兩個不等式分開處理，先乘上 20，再配方可得

$$(k-74)^2 \le 70^2 \tag{1}$$
$$(k-54)^2 > 30^2 \tag{2}$$

因爲 x^2 一定爲正數，所以 k 是非負的，從 (1) 得 $4 \le k \le 144$，從 (2) 得 $k < 24$ 或 $k > 84$。所以 k 的解爲 $4 \le k < 24$ 或 $84 < k \le 144$，在範圍裡，符合 $k \equiv 14$

mod 20 的 k 爲 14, 94, 114, 134，所以 x 的解有 4 個，分別爲

$$x = \frac{\sqrt{29}}{2}, \quad \frac{\sqrt{189}}{2}, \quad \frac{\sqrt{229}}{2}, \quad \frac{\sqrt{269}}{2}$$

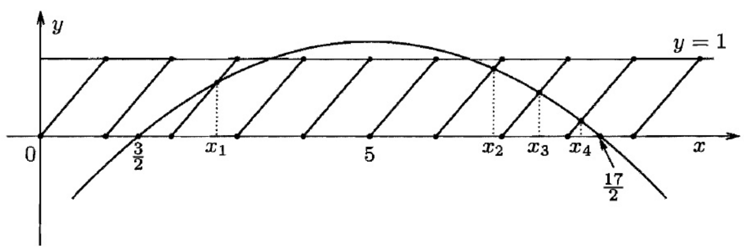
【解法三】 使用圖解，描繪 $y = 4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51$ 的圖形，去看何時通過 x 軸。然而 $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51$ 不容易描繪，另一個方法，是將原式拆成兩個函數。首先，將原式同時除以 40，再將等號兩邊同時加上 $\lfloor x \rfloor$，可得 $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{10}x^2 + \frac{51}{40}$，所以我們現在要找

$$y = \lfloor x \rfloor$$
$$y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{51}{40}$$

的解。但是，x 的範圍是無界的，因此，若將 y 設爲 $x - \lfloor x \rfloor$，即可得一個有界且具有週期性的函數。所以我們從 $0 = \frac{1}{10}x^2 - \lfloor x \rfloor + \frac{51}{40}$ 開始，兩邊同時加上 x，用 y 代替 $x - \lfloor x \rfloor$，重新整理，得

$$y = x - \lfloor x \rfloor$$
$$y = -\frac{1}{10}x^2 + x - \frac{51}{40}$$

(反過來說，在這個系統每個解 (x, y) 對原式都有不同的解)，下圖可以清楚的看到這個系統有 4 個解。



上圖顯示如何得到數值解，對 $c = 2,\ 6,\ 7,\ 8$ 去解 $x - c = y = -\frac{1}{10}x^2 + x - \frac{51}{40}$ 或 $x^2 = (40c - 51)/4$，所以得到的解跟前面一致。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem@gmail.com (主旨爲「102 年秋季第 X 題解答」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。