

[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第八題: 101.06.08 公佈, 101.06.22 中午 12 點截止

投擲一枚公正硬幣 n 次, 試求過程中連續出現兩次正面至少發生一遍的機率。

解答: 我們先假設 $P(n)$ 為 n 次投擲的過程中沒有連續出現正面的機率。如果第一次出現反面, 其發生的機率為 $\frac{1}{2}$, 則之後沒有連續出現正面的機率為 $P(n-1)$ 。然而, 如果第一次出現正面, 第二次必須為反面, 則就有機率為 $\frac{1}{4}$, 接著之後沒有連續出現正面的機率為 $P(n-2)$ 。我們可以得到此遞迴式

$$P(n) = \frac{1}{2}P(n-1) + \frac{1}{4}P(n-2)$$

其中 $P(1) = 1$ 和 $P(2) = \frac{3}{4}$ 。再藉由代換 $x_n = 2^n P(n)$ 使得關係式更為齊次。我們會得到一個費波那契數列 $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, 其中 $x_1 = F_3$ 和 $x_2 = F_4$ 。接著導出 $x_n = F_{n+2}$ 和 $P(n) = \frac{F_{n+2}}{2^n}$, 因此題目所需的機率值為 $P(n) = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$ 。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。