# [雙週一題]網路數學問題徵答
# 一百學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第六題： 101.05.11 公佈，101.05.25 中午 12 點截止

證明

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

解答：**【解法一】**

由題意即證明下列極限

$$3=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \qquad \square$$

由觀察得知

$$\begin{aligned}3&=\sqrt{1+2\cdot 4}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{16}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}\end{aligned}$$

因此猜測當 $n\geq 1$ 時，下列恆等式成立

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} \tag{1}$$

進一步由歸納法可確定 $(n+2)^2=n^2+4n+4=1+(n+1)(n+3)=1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}$。因爲 $\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}>\sqrt{(1+n)}$ 使得

$$3\geq\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(1+n)}}}}}$$

另一面，對任何 $\alpha > 1$ 和 $x > 0$ 時，

$$\sqrt{1+\alpha x} \le \sqrt{\alpha}\sqrt{1+x}$$

由 (1) 式的最內層開始重複運用上述不等式，並取 $\alpha = \sqrt{(n+2)^2}$ 可得

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} &\le \sqrt{\alpha}\sqrt{1+n} \\
\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}} &\le \sqrt{1+\sqrt{\alpha}(n-1)\sqrt{1+n}} \\
&\le \alpha^{2^{-2}}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
3 &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} \\
&\le (n+2)^{2^{1-n}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}
\end{aligned}$$

又因爲 $\lim_{n\to\infty}(n+2)^{2^{1-n}} = 1$，再由夾擠定理可得知

$$3 = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \qquad \square$$

**【解法二】**

考慮函數 $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots}}}}$$

接著擷取成 $n$ 個平方根，我們會得到一個遞增數列。然而，我們必須找出此數列的

上界。根據

$$\begin{aligned} f(x) &\le \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\cdots}}} \\ &\le \sqrt{2x\sqrt{3x\sqrt{4x\cdots}}} \le \sqrt{2x\sqrt{4x\sqrt{8x\cdots}}} \\ &= 2^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}} x^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}} \le 2^2 x = 4x \end{aligned}$$

可推得當 $x \ge 1$ 時 $f(x) \le 4x$。我們再觀察

$$f(x) \ge \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}} = x$$

由於這將會造成發散的因素，我們可削減不等式爲 $f(x) \ge \frac{1}{2}(x+1)$。並將所定義的關係式平方則可得到此方程式

$$(f(x))^2 = xf(x+1) + 1$$

再與

$$\frac{1}{2}(x+2) \le f(x+1) \le 4(x+1)$$

作結合我們會得到

$$x \cdot \frac{x+2}{2} + 1 \le (f(x))^2 \le 4x(x+1) + 1$$

進一步清楚地推導出雙邊不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1) \le \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1 \le f(x) \le 2x + 1 \le 2(x+1)$$

連續重複討論下去，我們會發現當 $n \ge 1$ 時，

$$2^{-\frac{1}{2^n}}(x+1) \le f(x) \le 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}(x+1)$$

假如在此雙邊不等式我們令 $n \to \infty$，即可得到 $x+1 \le f(x) \le x+1$，因此 $f(x) = x+1$。本題目則是由 Ramanujan 公式所產生 $x = 2$ 的特別案例爲

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}} = 3 \qquad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主

旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。